* نقطة اللانهائية

تكون نقطة اللانهائية نقطة شاذة معزولة للدالة f اذا وفقط إذا كانت الدالة f تحليلية عند جميع النقاط التي تقع في خارجية الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ، ونصف قطرها R كبير بقدر كاف،

- إذا كانت نقطة اللانهائية نقطة شاذة معزولة

عندئذ يتم تصنيفها الى إحدى الأنواع الآتية :

١- نقطة شاذة قابلة للاصلاح (للإزالة)

٢- " " قطب

٣- " " أساسية

لمعرفة نوع نقطة اللانهائية للدالة f نعوض في الدالة $f(z)$ كل z بـ $\frac{1}{t}$ ونبين نوع النقطة $t=0$

١- فاذا كانت $t=0$ نقطة شاذة قابلة للاصلاح او عادية فعندئذ $z=\infty$ تكون نقطة شاذة قابلة للإصلاح

مثال: حدد النقاط الشاذة للدالة $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ في المستوى العقدي الممتد

الحل: النقاط الشاذة للدالة المعطاة هي $z=0$ ، $z=\infty$

(شاذة أساسية ، من محاضرة سابقة)

لتبيان نوع نقطة اللانهائية $z=\infty$ نعوض كل z بـ $\frac{1}{t}$ فيكون

$$f(z)=f\left(\frac{1}{t}\right)=e^{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0} e^{t}=1$$

وعليه $t=0$ نقطة عادية فإن $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح.

ان منشور الدالة e^{t} في جوار الصفر هو : $e^{t}=1+t+\frac{1}{2!}t^{2}+\dots+\frac{1}{n!}t^{n}+\dots$

باستبدال كل t بـ $\frac{1}{z}$ في المنشور السابق نجد أن :

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^{2}}+\dots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n}}+\dots$$

نلاحظ من خلال المنشور السابق أن الجزء التحليلي (ذات القوى الموجبة تماماً > 0) معدوم

⟸ من هنا نستطيع القول تكون نقطة اللانهائية نقطة شاذة قابلة للاصلاح اذا كان الجزء التحليلي لا يحتوي على أي حد من الحدود ذات القوى الموجبة تماماً.

- إذا وضعنا $f(\infty)=1$ ∴ 1 هو الحد المطلق بالمنشور تصبح الدالة $e^{\frac{1}{z}}$ تحليلية عند اللانهائية.

مثال -2-.

لتكن لدينا الدالة $f(z)$ $f(z)=\frac{z-1}{z^3-2z}$ حدد النقاط الشاذة للدالة المعطاة في المستوي العقدي الممتد ← اي حدد نوع نقطة اللانهاية ايضاً $z=\infty$

الحل:

النقاط الشاذة للدالة المعطاة هي جذور المعادلة $z^3-2z=0$ بالإضافة الى نقطة اللانهاية $z(z^2-2)=0$ ← $z_1=0,\ z_2=\sqrt{2},\ z_3=-\sqrt{2}$

لما ان $z=0$ صفر من الدرجة الاولى للمقام ولا يعدم البسط ← $z=0$ قطب بسيط للدالة

وكذلك الامر بالنسبة لـ $z_2=\sqrt{2},\ z_3=-\sqrt{2}$ اي انه كلاً منهما قطب بسيط

لبيان نوع نقطة اللانهاية

$$f(z)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t^3}-2\frac{1}{t}}=\frac{\frac{1-t}{t}}{\frac{1-2t^2}{t^3}}=\frac{t^2(1-t)}{(1-2t^2)}$$

بما ان النقطة $t=0$ هي نقطة عادية لصفر الدالة اي ان $t=0$

اي ان نقطة اللانهاية $z=\infty$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح

$\lim f\left(\frac{1}{t}\right)=0 \quad f(\infty)=0$

لإيجاد منشور الدالة

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=(t^2-t^3)\frac{1}{1-2t^2}$$

$\frac{1}{1-c}$ ؛ $|c|=|2t^2|<1 \Rightarrow |t^2|<\frac{1}{2} \Rightarrow |t|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $t_0=0$ مركز النشر

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=(t^2-t^3)\left[1+2t^2+4t^4+8t^8+\dots\right]=t^2+2t^4+8t^{10}+\dots$$
$$-t^3-2t^5-4t^7-8t^{11}+\dots=t^2-t^3+2t^4-2t^5=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z^4}+\dots$$

وبما ان الجزء التحليلي معدوم ← النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح

نضع $f(\infty)=0$ تصبح الدالة تحليلية عند اللانهاية وصفر من الدرجة الثانية

الحد المطلق هو الاشر (مرتبة $\frac{1}{z^2}$)

(او عندما تظهر في القوى السالبة)

مثال:

عين وصنف النقاط الشاذة للصفر الدالة في المستوي العقدي الممتد $f(z)=\frac{z^3-2z}{z+2}$ ← اي عين نوع نقطة $z=\infty$ ايضاً.

الحل: النقاط الشاذة للصفر الدالة في المستوي العقدي الممتد هي جذور المعادلة $z+2=0$ ونقطة اللانهاية اي $z=-2$

بما ان $z=-2$ صفر من الدرجة الاولى للمقام، ولا يعدم البسط ← اذاً هي قطب بسيط.

ولمعرفة نوع نقطة اللانهائية نعوض عن كل z بـ $\frac{1}{t}$ فنجد أن

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{t^3} - 27}{\frac{1}{t} + 2} = \frac{\frac{1-27t^3}{t^3}}{\frac{1+2t}{t}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1-27t^3}{t^2(1+2t)}$$

ونلاحظ أن $t=0$ قطب من الرتبة الثانية للدالة $f\left(\frac{1}{t}\right)$ وذلك لأن $t=0$ صفر للمقام من الدرجة الثانية ولا تعدم البسط.

والنشر الآتي: $0 < |t| < \frac{1}{2}$;

$$f(t) = \left(\frac{1-27t^3}{t^2}\right)\frac{1}{1+2t}$$

$$= \left(\frac{1}{t^2} - 27t\right)(1 - 2t + 4t^2 - 8t^3 + 16t^4 - \cdots)$$

$$= -27t + 54t^2 - 108t^3 + \cdots = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 4 - 8t + 16t^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 4 - 35t + 70t^2 + \cdots$$

نستنتج من هذا النشر أن $t=0$ هي قطب لأن الحدود ذات القوى السالبة (أي الجزء الرئيسي بنشر لوران) محدود فهي قطب من الرتبة الثانية (لأن الأس الأعلى في الحدود ذات القوى السالبة $= 2$)

والآن: بالاستعاضة بهذا النشر كل $t = \frac{1}{z}$ فنحصل على

$$f(z) = z^2 - 2z + 4 - \frac{35}{z} + 70\frac{1}{z^2} + \cdots$$

من النشر السابق نستنتج أن الجزء التحليلي لمنشور الدالة $f(z)$ في جوار اللانهائية تتكون من عدد منته من الحدود $\Leftarrow$ فإن $z=\infty$ هي قطب ودرجة القطب هي أس أعلى حد في الجزء التحليلي

أي أن نقطة اللانهائية في المثال السابق هي قطب من الرتبة الثانية

* نقط النقطة الشاذة للاصلاح تكون بها الدالة $f(z)$ قابلة للاصلاح يتم ذلك بوضع $f(\infty) = a_0$ (الحد الثابت)
* اما النقطة القطب او الاساسية لا يمكن اصلاح الدالة عندها $\Leftarrow$ فلا يمكن اعطاء صورة لـ $f(\infty)$

ملاحظة:

إذا كانت الدالة $f(z)$ من الشكل $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ حيث كل من $p(z)$، $q(z)$ كثيرة حدود عندئذ إذا كان البسط كثير حدود من الدرجة M فإن نقطة اللانهائية بالنسبة للبسط فقط قطب من الرتبة M.

وإذا كان المقام كثير حدود من الدرجة n عندئذ فإن نقطة اللانهائية تكون قطب من الرتبة n

إذا كانت $m > n \Leftarrow$ فإن نقطة اللانهائية قطب من الرتبة $m-n$ $\Leftarrow$ (لصالح البسط)

" " $m \leq n \Leftarrow$ " " " شاذة قابلة للاصلاح ثم نصلح الدالة عندها

اما اذا كانت النقطة $t=0$ نقطة شاذة اساسية للدالة $f(\frac{1}{t})$ فعندئذ تكون نقطة اللانهاية نقطة شاذة اساسية

مثال:

$$f(z) = e^{z}$$

نلاحظ بان نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة معزولة لهذه الدالة في المستوي العقدي الممتد

لبيان نوع نقطة اللانهاية نبدل كل z بـ $\frac{1}{z}$ فتكون $f(\frac{1}{t}) = e^{\frac{1}{t}}$

وبما ان $t=0$، نقطة شاذة اساسية فان $z=\infty$، شاذة اساسية

طريقة النشر:

$$f(\frac{1}{t}) = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!}\frac{1}{t^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{t^n} \quad ; \; 0<|t|<\infty$$

$$f(z) = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$$

ونلاحظ بان الجزء التحليلي اي الحدود ذات القوى الموجبة تماما عددها غير منتهٍ لذلك فان نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة اساسية.

بالمثل sin دالة نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة اساسية

وذلك من منشورها لان الجزء التحليلي منشور الـ sin غير منتهية عند $z=\infty$ شاذة اساسية)

انتهت المحاضرة - ٣ - ١١ -

الثلاثاء ٢ محاضرة ماكو نظري ، ٢ ناخذ الواجب ...